Асоцирани тензори

Подизање и спуштање индекса. Да ли се од контраваријантних вектора и тензора могу добити еквивалентни коваријантни и обрнуто? Захтевамо најпре да унутрашњи производ метричког тензора g_{ij} или g^{ij} и неког тензора представља други неки тензор са истим бројем али другим распоредом индекса. Такви тензори су асоцирани тензори и помоћу њих можемо остварити подизање и спуштање индекса.

Пример: → унутрашњи производ метричког тензора g_{ij} и контраваријантног вектора A^i

$$A_{(i)} = g_{ij} A^j.$$

Овај производ мора бити тензорске природе, а по распореду индекса то је коваријантни вектор → A^i и A_i имају исти број индекса али им је различит распоред

$$g_{ij} A^j = A_i \quad \text{— (24)}.$$

Тиме смо контраваријантном вектору A^i придружили коваријантни вектор A_i, што је еквивалентно спуштању индекса. Слично, закључујемо да је унутрашњи производ контраваријантног метричког тензора g^{ij} и ковар. вектора A_j:

$$g^{ij} A_j = A^i \quad \text{— (25)}$$

и стварно контраваријантни вектор.

$A_j = g_{jk}A^k$, на основу (10) $g^{ij}g_{kj} = \delta^i_k$ ⊕ добијамо $A^i = g^{ij}(g_{jk}A^k) = \delta^i_k A^k = A^i$, а то одговара контраваријантном вектору од којег смо пошли, вектору из којег је он произишао са спуштањем индекса. Зато величине A^i и A_i можемо сматрати компонентама истог вектора, у тензорском смислу. У том смислу говоримо о контраваријантним или коваријантним комп. вектора A. Даље, помоћу метричког тензора говоримо исто, неког вектора и обрнуто.

Сада скаларни производ (13) пишемо као:

$$(A,B) = g_{ij}A^iB^j$$

$$(A,B) = (g_{ij}A^i)B^j = A^i(g_{ij}B^j), \text{ на основу (24) и (25) имамо}$$

$$(A,B) = A_iB^i = A^iB_i \quad \text{→ сумирање по } i$$

Нпр. у случају квадратне форме (7), све ће релације имати облик:

$A^1 = A_1;\ A^2 = A_2;\ A^3 = A_3;\ A^4 = -A_4$

$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ii}(dx^i)^2$

$g_{ii}A^i = A_i;\ g_{11} = g_{22} = g_{33};\ g_{44} = -1.$

⊕ из 1°: $g^{ij}A_j = g^{ij}(g_{jk}A^k) = (g^{ij}g_{jk})A^k = \delta^i_k A^k = A^i$, итд.

$A'^i = A^i$

Слично формирамо и унутрашњи производ метричког тензора и неког другог тензора, нпр. $g_{ij}A^{ik}$ и добијамо:

$$g_{ij}A^{ik} = A_{i}^{\,k} \quad \text{--- (28)}$$

Ово је мешовити тензор II реда асоциран датом контраваријантном тензору A^{ik}.

Уобичајено је да се тачком назначе положаји индекса који су спуштени или дигнути, као у горњем примеру. Ако желимо да у истом тензору спустимо оба индекса, можемо извршити двоструко множење са метричким тензором, након чега добијамо:

$$g_{ij}\,g_{lk}\,A^{ik} = A_{il}^{\cdot\cdot} \quad \text{--- (29)}$$

Овај поступак се може примењивати на још сложеније изразе, нпр.

$$g_{ij}\,g^{kl}\,g_{mn}\,A^{imp}_{kq} = A^{\cdot l \cdot p}_{j \cdot n q} \quad \text{--- (30)}$$

<u>Случај Еуклидовог простора</u>

Ако је посматрани простор Еуклидов, елементи метричког тензора су облика $g_{ij}=\delta_{ij}$ (5), па се релација између коваријантних компоненти (24) $[g_{ij}A^{j}=A_{i}]$, своди на $A_{i}=\delta_{ij}A^{j}$. → сума по j --- (31)

јер је $\delta_{ij}=1$ само за $i=j$,

Пошто у овој суми по j преостаје само члан код кога је $j=i$, па можемо писати:

$$A_{i}=A^{i} \quad \text{--- (32)}$$

Слично, за тензоре II реда, на основу (29) пишемо:

$$A_{ik}=g_{ij}\,g_{lk}\,A^{jk}=\delta_{ij}\,\delta_{lk}\,A^{jk}\overset{l=k}{=}\delta_{ij}\,A^{jk},$$ нпр. за $i=j$ →

$$A_{ik}=A^{ik} \quad \text{--- (33)}$$

Слично важи и за тензоре вишег реда, те закључујемо да се у Еуклидовом прост. контравар. и ковар. компоненте тензора са истим индексом међусобно поклапају. Зато у оваквим просторима не морамо правити разлику између ових двеју врста компонената и индексе можемо писати по вољи горе или доле. Нпр. за тензор III реда имамо:

$$A^{ijk} = A^{ij}_{k} = A^{i}_{jk} = A_{ijk}.$$

Ово важи само ако је метричка форма Еуклидовог простора сведена на облик (4), нпр. $ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\dots+(dx^n)^2$. Тако нпр. у Декартовим правоуглим коорд. нема разлике између контравар. и коваријантних компоненти, док у сферним коорд. оне више нису међусобно једнаке.

Геодезијске линије

Кристофелови симболи. Испитајмо како се трансформишу парцијални изводи компоненти метричког тензора по координатама. Пођимо од обрасца (2) у облику: $\bar g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^j}\cdot g_{kl}$

$$\bar g_{jk} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\cdot g_{mn}$$ и диференцирајмо га по $\bar x^i$.

Помоћу низа математичких поступака добијамо израз:

$$\boxed{\Gamma_{ij,k} = [ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)} \quad \text{--- (34)}$$

Ова релација представља Кристофелов симбол прве врсте. Из његове дефиниције се види да је овај симбол симетричан у одн. на прва два индекса:

$$\Gamma_{ji,k} = \Gamma_{ij,k} \quad \dots (35)$$

Закон трансформације Кристофеловог симбола I врсте је:

$$\overline{\Gamma}_{ij,k} = \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k}\,\Gamma_{lm,n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \overline{x}^i\,\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k}\, g_{mn} \quad \ldots (36)$$

Закључујемо да Кристофелови симболи I врсте у општем случају нису тензори. Ако су трансформ. линеарне, други члан отпада па су ови симболи коваријантни тензори III реда.

Производ величине $\Gamma_{ij,k}$ са контраваријантним метричким тензором g^{lk}

$$\boxed{\underbrace{g^{lk}\Gamma_{ij,k}}_{\text{сума по } k} = \Gamma^{l}_{ij} = \left\{ {l \atop ij} \right\}} \quad \ldots (37)$$

је Кристофелов симбол II врсте. На основу (35) следи да је овај симбол симетричан у одн. на доње индексе

$$\Gamma^{l}_{ji} = \Gamma^{l}_{ij} \quad \ldots (38)$$

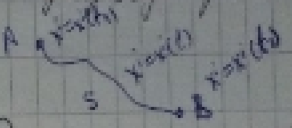
Према (36) и (37) видимо да ни Кристофелови симболи друге врсте у општем случају нису тензори.

Наведене величине зависе искључиво од метрике посматраног простора и представљају његове значајне карактеристике. У случају Еуклидовог простора и праволинијских Декартових коорд. све компоненте метричког тензора g_{ij} су константе, па су сви изводи ових величина једнаки нули.

Пошто се у овом случају метричка форма увек може свести на облик (4), закључујемо да у Еуклидовом простору постоји бар један систем коорд. у коме су сви Кристофелови симболи I и II врсте једнаки нули. То је карактеристична одлика Еуклидових простора, којом се они битно разликују од нееуклидских Риманових простора.

Геодезијске линије

Уочимо двије тачке у Римановом простору и неку криву која их спаја. Нека су једначине ове криве



$$x^i = x^i(t) \quad \text{---}(39)$$

гдје је t неки скалар и игра улогу параметра. Растојање s између двих тачака дуж твоје криве одређено је метричком формом (1) [$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$] коју пишемо у облику

→ јер диференцирано $dx^i dx^j = \frac{dx^i}{dt}dt\,\frac{dx^j}{dt}dt$

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,\dot{x}^i \dot{x}^j\,dt^2$$

гдје тачка означава извод по параметру t. Ако са t_1 и t_2 означимо вриједности параметра које одговарају уоченим тачкама, то растојање између њих дуж одабране линије износи

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i \dot{x}^j\,dt^2} \quad \text{--}(40)$$

Од свих могућих кривих које спајају ове тачке потражимо ону дуж које је растојање s минимално, тј. дуж које горњи интеграл има минималну вриједност. Такве линије су геодезијске линије и од посебног су интереса у општој теорији релативности. Формула за геодезијске линије је:

$$\boxed{\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{l}\,\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds} = 0} \quad \text{--}(41) \rightarrow \text{сума по } i \text{ и } j$$

Ово су диференцијалне једначине геодезијске линије, тј. такве линије које спаја најкраћим путем двије уочене тачке у Римановом простору.

У случају Еуклидовог простора сви Кристофелови ~~...~~ симболи су једнаки нули па се претходна једначина своди на

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} = 0 \quad \text{---}(42)$$

одакле се интеграцијом добија $x^l = a^l s + b^l$ --(43)

Ове једначине представљају праву линију која је заиста најкраће растојање између двије тачке у овом простору.

Коваријантне формулације градијентних извода

(градијент, дивергенција, ротор, Лапласијан)

Градијентни изводи из векторске анализе се могу генералисати и формулисати у тензорском облику. Ако је ϕ скалар, његов градијент се дефинише као скуп парцијалних извода

$$(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \quad \text{--- (44)}$$ слично као и у класичној теорији

→ скуп парц. извода скалара по координатама

Пошто је овај скуп једнак (21) из претходног дела коваријантан вектор, и градијент скалара представља коваријантни вектор. Ово важи ако је ϕ скалар у смислу општег тензорског рачуна.

Дивергенција контраковар. вектора A^i је:

$$\nabla\cdot A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{il}A^l \quad \text{--- (45)}$$ → дивергенција вектора је увијек скалар

Ротор ковар. вектора A_i је:

→ показати да је ово ковар. тензор у пог. 6.6 под б)!!!

$$(\nabla\times A_i)_j = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \quad \text{--- (46)}$$ → ротор вектора је коваријантни тензор чиме се овај појам битно разликује од ротора у класичној теорији вектора.

Лапласијан скалара ϕ је:

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} + \Gamma^i_{il}g^{lj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) \quad \text{--- (47)}$$

У случају Еуклидовог простора и Декартових коорд., сви Кристофелови симболи су једнаки нули, па се коваријантни изрази своде на познате изразе у векторској анализи. → Показати! $\Gamma^i_{il}=0$; $g^{ij}=1$; $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$

Апсолутни (Бјанкијев) извод: Пример 6.22 где смо $\frac{dA^i}{dt}$ није тензор.

Уочимо у n-мерном Римановом простору неку криву $x^i = x^i(t)$. Апсолутни (Бјанкијев) извод коваријантног вектора A_i по параметру t је:

коваријантни вектор

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{dA_i}{dt} - \Gamma^l_{ij}\frac{dx^j}{dt}A_l \quad \ldots (48)$$

Слично, апсолутни извод контраваријантног вектора A^i по парам. t је:

контраваријантни вектор

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + \Gamma^i_{jl}\frac{dx^j}{dt}A^l \quad \ldots (49)$$

Овако дефинисани појмови представљају генерализацију обичног извода вектора по параметру, који се и своде у Еуклидовом простору.

За векторе A_i или A^i каже се да се (?) преко паралелно дуж криве $x^i = x^i(t)$, ако је њихов апсолутни извод $\frac{\delta A_i}{\delta t}$, одн. $\frac{\delta A^i}{\delta t}$ дуж ове криве једнак нули.

одн. да су колинеарни са том кривом

Увијек кад тражимо диферен. вектора по параметру нпр. t треба да добијемо величину исте природе, морамо са диференц. у смислу апсолутног извода.